Décomposition de Dunford (algorithmique)

Thm : Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit $A \in M_d(K)$.

Il existe un unique couple $(D,N) \in \mathcal{D}_d(\mathbb{C}) \times \mathcal{N}_d(K)$ tel que $A = D+N$, $DN = ND$

Lem : Si U inversible, N nilpotente et $UN = NU$, alors $U-N$ est inversible.

Notons m l'ordre de nilpotence de N : $N^m = 0$.

$U - N = U(I_n - U^{-1}N)$

Or $(I_n - U^{-1}N)\sum_{k=0}^{m-1}(U^{-1}N)^k = I_n$, donc $U-N$ inversible comme produit d'inversibles

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A, scindé sur $\mathbb{C}$ alg. clos : $\chi_A = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{n_i}$

Notons $P = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i) = \dfrac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'} \in K[X]$ car $\chi_A, \chi_A \wedge \chi_A' \in K[X]$ et algorithme d'Euclide

En prenant $r = \max n_i$, $\chi_A \mid P^r$, donc $P^r(A) = 0$ par Cayley-Hamilton.

• Introduisons (H_n) : "$A_n \in K[A]$, $P(A_n) \in P(A)^{2^n}K[A]$ et $P'(A_n)$ inversible"

où $A_0 = A$, $A_{n+1} = A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1}$ (méthode de Newton)

* $A_0 = A \in K[A]$, $P(A_0) = P(A) \in P(A)^{2^0}K[A]$ et puisque $P \wedge P' = 1$, il existe $U, V \in K[X]$, $UP + VP' = 1$.

Donc $V(A)P'(A) = I_n - U(A)P(A)$ est inversible par lemme, puisque $U(A)P(A)$ nilpotent.

Donc $\begin{cases} P'(A) \text{ est inversible} \\ P'(A)^{-1} = (I_n - U(A)P(A))^{-1}V(A) \in K[A] \end{cases}$ D'où l'initialisation.

* Supposons H_n, $n \in \mathbb{N}$ fixé.

· A_{n+1} est bien définie, $P'(A_n)^{-1}$ est un polynôme en A_n donc en A : $A_{n+1} \in K[A]$.

· $(X+Y)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^kY^{m-k} = X^m + YmX^{m-1} + Y^2Q_0(X,Y)$.

Donc on peut toujours écrire $P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X,Y)$

De là, $P(A_{n+1}) = P(A_n) - P(A_n)P'(A_n)^{-1}P'(A_n) + P(A_n)^2P'(A_n)^{-2}Q(A_n, P(A_n)P'(A_n)^{-1})$

$= P(A_n)^2 \times \tilde{Q}(A) \underset{(HR)}{=} [P(A)^{2^n}B_n(A)]^2 \times \tilde{Q}(A) \in P(A)^{2^{n+1}}K[A]$.

· $UP + VP' = 1$, donc $V(A_{n+1})P'(A_{n+1}) = I_n - U(A_{n+1})P(A_{n+1})$.

Or $P(A_{n+1}) \in P(A)^{2^{n+1}}K[A]$, donc $P(A_{n+1})$, puis $U(A_{n+1})P(A_{n+1})$ nilpotent.

Par lemme, $P'(A_{n+1})$ inversible.

Cela conclut la récurrence.

• Soit $r \in \mathbb{N}$, $P(A)^r = 0$. Pour $n \geq \lfloor \log_2 r \rfloor + 1 = n_0$, $P(A_n) = 0$, $A_{n+1} = A_n$

A_{n_0} est annulée par P donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$A_{n_0} - A = \sum_{k=0}^{n_0-1} A_{k+1} - A_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} P(A_k)P'(A_k)^{-1}$ somme de nilpotents qui commutent donc nilpotente.

• $D = A_{n_0}$ et $N = -A_{n_0} + A$ conviennent.

• Si D' et N' conviennent, $D - D' = N' - N$ diagonalisable et nilpotent, donc nul.